صفوف المجموعات

عناصر المجموعات: $a, b, c \ldots x, y, z$

المجموعات: A, B, C, X, Y, Z

صفوف المجموعات $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots \mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{K}$

(عناصر صفوف المجموعات هي مجموعة جزئية من مجموعة مفروضة)

فمثلاً:

أذا كانت $X \neq \phi$ مجموعة ما

فنرمز بـ 2^X أو $P(X)$ لصف المجموعات الجزئية من X كل مجموعة جزئية من 2^X

نسميها صف جزئي من 2^X من X فاذا كانت $A \subset X$ فنكتب $A \in 2^X$

على سبيل المثال لنأخذ المجموعة $X = \{a, b, c\}$ فيكون

$2^X = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

صفوف جزئية $\mathcal{Z}_1 = \{\phi\} \subset 2^X$

$\mathcal{Z}_2 = \{X\} \subset 2^X$

$\mathcal{Z}_3 = \{\phi, \{a\}, \{b\}\} \subset 2^X$

صفوف المجموعات $\mathcal{Z}_4 = (\{a\})$

١ - نصف الحلقة ونصف الجبر

نرمز X لمجموعة غير خالية ونرمز 2^X لصف كل المجموعات الجزئية من X $S \subset 2^X$

تعريف: ليكن S صفاً جزئياً من 2^X.

نسمي S نصف حلقة في X اذا تحقق ما يلي:

① اذا كانت $A, B \in S$ فان $A \cap B \in S$

② اذا كانت $A, B \in S$ فتوجد مجموعات منفصلة فيما بينها $C_1, C_2 \ldots C_n$ بحيث يكون $A \setminus B = \sum_{i=1}^{n} C_i$

ملاحظة:

اذا كانت $C_1, C_2, \ldots, C_n$ مجموعات مفروضة فنرمز

$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ ولكن اذا كانت المجموعات $C_1, C_2 \ldots C_n$ منفصلة

فيما بينها فنكتب $C_1 + C_2 + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$

تعريف: نصف الجبر هو نصف حلقة فيها X

خواصها:

① اذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$ (S نصف حلقة) فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in S$

② ~~المجموعة~~ المجموعة $\emptyset \in S$ وذلك إذا أخذنا $A = B$ في نصف الحلقة فيكون $C_i \in S$ ، C_i غير A / A

$\emptyset$

ومن ذلك ينتج $\emptyset = C_i \in S$

أمثلة:

① الصف $S_1 = \{\emptyset, X\}$ يشكل نصف حلقة من كل مجموعة X لأن

[1] $\emptyset \cap X = \emptyset \in S_1$

[2] $\emptyset / X = \emptyset = \emptyset_{\in S_1} + \emptyset_{\in S_1}$

$X / \emptyset = X = X + \emptyset$

أي أن S_1 نصف حلقة على X كما أن S_1 نصف جبر على X لأن $X \in S_1$

② الصف $2^X = S$ حيث $X \neq \emptyset$ يشكل نصف حلقة على X

وهو نصف جبر

لتأخذ المجموعة $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية والصف

$S = \{ [a, b[\; ; \; a, b \in \mathbb{R} \}$

نجد أن S يشكل نصف حلقة R لأن

① إذا كانت $[a, b[\in S$, $[c, d[\in S$

فإن $[a, b[\cap [c, d[= [\alpha, \beta[\in S$

② $[a, b[\cap [c, d[= \emptyset$, $[a, b[\setminus [c, d[= [a, b[\cup \emptyset$

$= [a, b[\cup \emptyset$

$[\alpha, \beta[$

S نصف حلقة على R لكن S ليس نصف جبر لأن $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[\notin S$

[4] كل من الصفوف الآتية تشكل نصف حلقة على R

<

$S_1 = [\,]a_i, b_i]\;,\; a_i, b_i \in \mathbb{R}]$

$S_2 = \{[a_i, b_i]\;,\; a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$

$S_3 = \{]a_i, b_i[\;,\; a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$

(5) لناخذ المجموعة $X = \mathbb{R}^n$ وصف المجالات

$S = [\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i[\;,\; a_i, b_i \in \mathbb{R}]$

فنجد أن S نصف حلقة على $\mathbb{R}$

$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i[= [a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \cdots \times [a_n, b_n[$

وهو جداء الديكارتي للمجموعات المذكورة.

ملاحظة: الجداء الديكارتي لمجموعة غير خالية $Y\,X$

هو ثنائيات مرتبة له الشكل:

$X \times Y = \{(x, y),\; x \in X,\; y \in Y\} \neq Y \times X$

ملاحظة هامة:

إذا كانت S نصف حلقة على X وكانت $A, B \in S$ فليس بالضرورة

أن $A \cup B \in S$

مثال في المثال (3) فإن المجموعات $S \ni A = [1, 3[$

$S \ni B = [5, 10[$

بينما $A \cup B =]1, 3[\cup [5, 10] \notin S$

2 الحلقة والجبر

فيما يلي نعتبر أن X مجموعة غير خالية (معرّفة) و 2^X صف المجموعات الجزئية X

حيث أن $\mathcal{R}$ صف جزئي من 2^X (أي $\mathcal{R} \subset 2^X$)

تعريف: نقول أن الصف $\mathcal{R}$ يشكل حلقة لـ X إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1.2) إذا كانت $A, B \in \mathcal{R}$ فإن $A \cup B \in \mathcal{R}$

(2.2) " " " $A \setminus B \in \mathcal{R}$

• اذا كان R نصف حلقة على X وكان $X \in R$ فنقول ان R يشكل جبر على X.

خواص: نعتبر ان R نصف حلقة على X

① $\emptyset \in R$ لانه (؟؟) ناخذ $A = B$ نجد:

$$\emptyset = A \setminus A \in R$$

② اذا كان $A, B \in R$ فان $A \cap B \in R$ لان:

$$A \cap B = \underbrace{(A \cup B)}_{\in R} \setminus \underbrace{[\underbrace{(A / B)}_{\in R} \cup \underbrace{(B / A)}_{\in R}]}_{\in R}$$

A B A∩B

③ اذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n \in R$ فان $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in R$ و $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in R$

④ اذا كان $A, B \in R$ فان $A \Delta B \in R$ (الفرق التناظري) لان

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B / A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

أمثلة:

فيما يلي نعتبر ان X مجموعة غير خالية.

① الصف $R = \{\emptyset, X\}$ يشكل حلقة وجبر ~~[illegible]~~ على X

② الصف $A = \{\emptyset, X, A, A^c\}$ حيث $A \subset X$ يشكل حلقة وجبر على X

③ $A = 2^X$ يشكل جبر على X

④ لكن الصف $R = \{\emptyset, A, X\}$ حيث $A \subset X$ ($A \neq \emptyset$) هل يشكل حلقة أو جبر على X؟

الحل

$\emptyset \cup A = A \in R$

$\emptyset \cup X = X \in R$

$A \cup X = X \in R$

$\emptyset \setminus A = \emptyset \in R$

$\emptyset \setminus X = \emptyset \in R$

$X \setminus \emptyset = X \in R$

$X \setminus A = A^c \notin R$

$R \Leftarrow$ لا يشكل حلقة وبالتالي لا يشكل جبر

3 - σ - الحلقة و σ - الجبر

فيما يلي نعتبر أن X مجموعة غير خالية و 2^X صف المجموعات الجزئية من X
وليكن $\mathcal{Z}$ صفاً جزئياً من 2^X (أي $\mathcal{Z} \subset 2^X$)

تعريف:

نقول أن الصف $\mathcal{Z}$ يشكل σ- حلقة في X إذا تحقق ما يلي:

1- إذا كان $A, B \in \mathcal{Z}$ فإن $A \setminus B \in \mathcal{Z}$

2- إذا كان $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{Z}$ فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{Z}$

• إذا كان $\mathcal{Z}$ σ- حلقة وكان $X \in \mathcal{Z}$ نسمي $\mathcal{Z}$ σ- جبر في X.

خواصها: فيما يلي نعتبر أن $\mathcal{Z}$ σ- حلقة

1- $\phi \in \mathcal{Z}$

2- إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{Z}$ فإن $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{Z}$ لأن:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \left[\bigcup_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i)\right]$$

(1) بيان موجود في الكتاب ص

3- إذا كان $\mathcal{Z}$ σ- جبر فيكون:

من أجل كل $A \in \mathcal{Z}$ فإن $X \setminus A = A^c \in \mathcal{Z}$ كما أن:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in \mathcal{Z}$$

ملاحظة:

أ) كل حلقة هي نصف حلقة لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة
كل جبر هو نصف جبر لكن العكس غير صحيح

ب) كل σ- حلقة هي حلقة لكن العكس غير صحيح
كل σ- جبر هو جبر لكن العكس غير صحيح

م-

4 - صف دنكين والصف المطرد

فيما يلي نعتبر أن X مجموعة غير خالية و 2^X صف كل المجموعات الجزئية في X وليكن D صفاً جزئياً من 2^X (أي $D \subset 2^X$).

تعريف:

نقول إن الصف D يشكل صف دنكين في X إذا تحقق ما يلي:

1- $X \in D$

2- إذا كانت $A, B \in D$ بحيث $A \subset B$ فإن $B \setminus A \in D$

3- إذا كان $A_1, A_2, \ldots \in D$ ومنفصلة مثنى مثنى فإن $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in D$

خواصها: نفترض أن D صفاً دنكن

① $\emptyset \in D$ وكذلك $A^c = X \setminus A \in D$

② كل σ- جبر هو صف دنكن ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

③ مبرهنة:

صف دنكن D تكون σ- جبر إذا وفقط إذا كان مغلقاً بالنسبة لتقاطع المنتهية (وهذا يعني أنه إذا كان $A_1, A_2, \ldots, A_n \in D$ فإن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in D$)

أمثلة عن صف دنكن:

① كل σ- جبر هو صف دنكن وبشكل خاص الصفوف:

$D_1 = \{\emptyset, X\}$, $D_2 = 2^X$, $D_3 = \{\emptyset, A, A^c, X\}$

② لنأخذ المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$ والصف $D = \{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{b,d\}, X\} \subset 2^X$

فنجد أن D صف دنكن على X لكن D ليس σ- جبر لأنه لو أخذنا المجموعتين:

$\{c,d\} \cap \{a,c\} = \{c\} \notin D$

③ لنأخذ $X = \{a, b, c, d\}$ و $D = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, X\} \subset 2^X$

فنجد أن D صف دنكن على X

الصف المطرد:

تعريف: نقول عن متتالية مجموعات $\{A_n\}$ أنها:

أ متزايدة إذا كانت:

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

ب متناقصة إذا كان:

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$$

• كل متتالية متزايدة أو متناقصة نسميها متتالية مطردة (تزايداً أو تناقصاً)

• لتكن X مجموعة غير خالية و 2^X صف كل المجموعات الجزئية لـ X وليكن M صفاً جزئياً منه (أي $M \subset 2^X$)

تعريف الصف المطرد:

نقول أن M يشكل صفاً مطرداً على X إذا تحقق ما يلي

١- من اجل كل متتالية متزايدة $\{A_n\}$ من عناصر M اي $A_n \in M$ فإن $\bigcup_{n} A_n \in M$

٢- من اجل كل متتالية متناقصة $\{B_n\}$ من عناصر M اي $B_n \in M$ فإن $\bigcap_{n} B_n \in M$

أمثلة :

١- كل σ- حلقة في صف مطرد

٢- كل σ- جبر هو صف مطرد

٣- 2^X صف مطرد

تمرين 1 :

اثبت ان كل حلقة على X هي نصف حلقة على X لكن العكس غير صحيح

تذكرة

تعريف الحلقة:

$R \Leftarrow \begin{cases} A \cup B \in R \\ A \setminus B \in R \end{cases} \quad \forall A,B \in R$

نصف الحلقة

$S \Leftarrow \begin{cases} A \cap B \in S \\ A / B = \sum_{i=1}^{n} C_i \end{cases}$

الحل : لتكن R حلقة على X هذا يعني ان :

① $A \cup B \in R$ و $\forall A,B \in R$

② $A \setminus B \in R$ و $\forall A,B \in R$

③ $A \cap B \in R$ و $\forall A,B \in R$

وهذا هو الشرط الاول في تعريف نصف الحلقة

لنكتب $A / B = C \in R$ فنجد ان

$A \setminus B = C + \emptyset$

وهذا يعني ان الشرط الثاني من تعريف نصف الحلقة محقق ايضا.

لذلك فان R نصف حلقة على X

لا ثبات العكس يكفي ذكر مثال

وجدنا ان الصف $\{[a,b[\ , a,b \in R\} \cup \{\emptyset\}$ نصف حلقة على R ولنأخذ المجموعتين

$A = [1,3[$ و $B = [5,6[\in S$

فنجد ان $A \cup B = [1,3[\cup [5,6[\notin S$ وبالتالي S ليست حلقة على R

.

تمرين 2 :

اثبت ان نصف الحلقة تكون حلقة على X اذا كانت مغلقة بالنسبة للاجتماع المنتهي

الحل :

لتكن S نصف حلقة على X بحيث تحقق الشرط

وهذا هو شرط ١ في تعريف الحلقة $A \cup B \in S \Leftarrow A,B \in S$ -١

لتكن $A, B \in S$ و S نصف الحلقة ، عندئذ:

$$A \setminus B = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i}_{\in S} \quad , \quad C_i \in S$$

اي ان $A \setminus B \in S$ وهو برهان الشرط الثاني لتعريف الحلقة

نتيجة:

S حلقة $\Longleftrightarrow$ { S نصف حلقة + ومغلقة بالنسبة لاجتماع منته }

تمرين ٧: لتكن $X = N$ مجموعة الاعداد الطبيعية ولنأخذ الصف $\mathcal{H}$ المؤلف من كل المجموعات الجزئية لـ N المعدودة على الاكثر.

$\mathcal{H} = \{ A \; ; \; A \subset N \; : \;$ A معدودة على الاكثر $\}$

هل يشكل $\mathcal{H}$ حلقة ، σ - حلقة ، أو جبراً ، σ - جبر على N ؟

الحل

$\mathcal{H}$ تشكل حلقة ؟

① لتكن $A, B \in \mathcal{H}$ هذا يعني ان B, A مجموعتين معدودتين على الاكثر لذلك يكون $(A \cup B)$ مجموعة معدودة على الاكثر $\Longleftrightarrow (A \cup B) \in \mathcal{H}$

② كما ان $(A \setminus B)$ مجموعة معدودة على الاكثر $\Leftarrow (A \setminus B) \in \mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ حلقة على N

$\mathcal{H}$ σ - حلقة ؟

كما ذكرنا اعلاه بان $(A \setminus B) \subset \mathcal{H}$ من اجل اي مجموعتين $A, B \in \mathcal{H}$

الان لتكن $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{H}$ هذا يعني ان كل المجموعات A_i معدودة على الاكثر

$\Leftarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ معدودة على الاكثر

$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \subset \mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ σ - حلقة على N.

وبما ان N مجموعة معدودة فان $N \in \mathcal{H}$

$\Leftarrow \mathcal{H}$ جبر (لأنه حلقة) و σ - جبر (لأنه σ - حلقة)

تمرين ٤: لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن الصف

$K = \{A \subset N \,,\, A$ مجموعة منتهية $\}$

هل K يشكل حلقة أو حلقة وجبر أو جبر ؟